LOS NÚMEROS DE LA NATURALEZA

Dra. Marilina Carena
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL), UNL-CONICET, Santa Fe

Existen números y proporciones geométricas que prevalecen en la naturaleza de manera sorprendente, excediendo la simple casualidad. Asimismo, estos números aparecen en las diferentes manifestaciones artísticas del hombre debido a que son sinónimos de belleza y armonía desde la antigüedad.

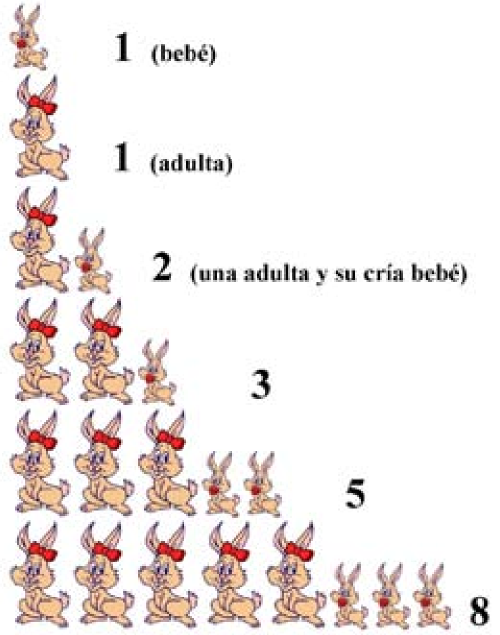


Fig. 1: Número de hembras al cabo de 6 meses

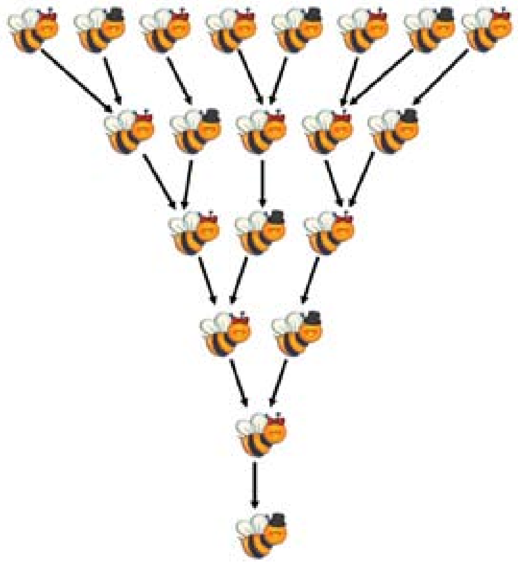


Fig. 2: Ancestros de una abeja macho


Fig. 3: Números de Fibonacci en las flores (foto: C. Berli)

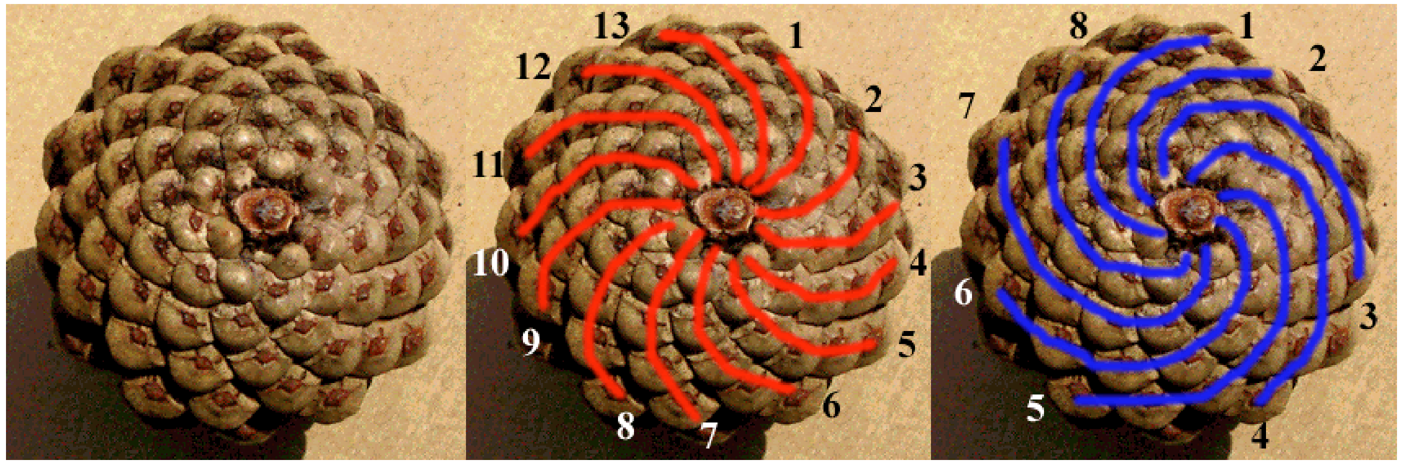


Fig. 4: Espirales en una piña

La sucesión de Fibonacci

En matemáticas, una sucesión no es más que una lista ordenada de números. Curiosamente, existe una sucesión que aparece frecuentemente en la naturaleza. Pero antes de explorar la presencia de esta sucesión entre los seres vivos, vamos a exponer el ejemplo que dio origen a la misma. Fibonacci fue el nombre con el que se conoció a Leonardo de Pisa, por la contracción de filius y Bonacci, palabras del italiano que unidas significan “hijo de Bonacci”. En 1202, Fibonacci publicó su libro Liber Abaci, en el que entre otros temas propuso el siguiente problema. Supongamos que se tiene una pareja de conejos (con la palabra “pareja” nos referiremos siempre a un par formado por un macho y una hembra) que siguen las siguientes reglas de procreación: Cada conejo bebé tarda un mes en poder ser reproductivo, es decir, al mes de nacer pasa a ser un conejo “adulto”. Cada pareja adulta da nacimiento a una nueva pareja al cabo de un mes, y se supone que no hay muertes. La pregunta es, ¿cuántas parejas de conejos habrá después de un año? La respuesta es bastante sencilla, pues lo único importante es detectar la cantidad de conejos hembras en cada generación. Para ello observemos el diagrama de la Fig. 1, en el que se muestran la cantidad total de hembras al comienzo de cada mes.

Se debe notar que, al final de cada mes, la cantidad de hembras adultas es igual a la cantidad total de hembras del mes anterior, y la cantidad de hembras bebés es igual a la cantidad de hembras adultas del mes anterior. Por lo tanto la cantidad total de hembras en cada mes es exactamente la suma de las hembras en los dos meses anteriores. Entonces la cantidad de hembras (y por lo tanto el número de parejas) en cada mes se corresponde con la siguiente sucesión de números

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 ...

en la que cada elemento es la suma de los dos anteriores. Por ejemplo, el número que le sigue al 89 es el 144, pues 55+89=144. Dado que el número 144 ocupa la posición 12 en la lista, ésta es la cantidad de parejas de conejos que habrá luego de un año. Esta lista ordenada de números es conocida como sucesión de Fibonacci.

Uno debe admitir que el ejemplo anterior no es demasiado realista, ya que tiene varios supuestos que en general no se cumplen: todos los meses ocurren nacimientos, siempre nace una pareja, no hay muertes. Estos supuestos son sólo simplificaciones para ilustrar el problema. Sin embargo existen en la naturaleza ejemplos más reales en los que aparece la sucesión de Fibonacci. Uno de ellos es el árbol genealógico de los machos de una colmena de abejas productoras de miel. En toda colmena existe una abeja hembra llamada “reina”, que es la única capaz de producir huevos. Las abejas “obreras” también son hembras, pero no producen huevos, sólo trabajan. En la colmena también existen abejas “machos”, que no trabajan y su única función es aparear a la reina (zánganos). Estos provienen de huevos de la abeja reina no fertilizados, y por lo tanto tienen madre, pero no tienen padre. En cambio todas las hembras son engendradas por la unión de la reina con una abeja macho, de manera que las hembras tienen madre y padre. De acuerdo a esto, el árbol genealógico de una abeja macho es el siguiente: 1 madre, 2 abuelos (una hembra y un macho), 3 bisabuelos (dos hembras y un macho), 5 tatarabuelos (tres hembras y dos machos), y así podemos seguir. En la Fig. 2 se ve claramente que la cantidad de ancestros de una abeja macho en cada generación se corresponde con los números de la sucesión de Fibonacci.

Fibonacci en el reino vegetal

Una curiosidad que ha cautivado a naturalistas y observadores durante muchos años es que los patrones de crecimiento de gran parte del reino vegetal parecen estar vinculados con la sucesión de Fibonacci. En efecto, existen muchas especies de plantas en las que el número de pétalos de sus flores corresponde a alguno de los números de Fibonacci. Hay flores que tienen sólo 1 pétalo, otras tienen **2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ...** La Fig. 3 muestra una serie de ejemplos de flores silvestres de nuestra región. Las margaritas tiene en general 21 o 34 pétalos, y algunas tienen 55 y hasta 89. Muy pocas veces la cantidad de pétalos de una flor es un número que no está dentro de los de Fibonacci.

Otra de las apariciones de la sucesión de Fibonacci en la naturaleza es en muchas semillas y frutos, donde se observa la formación de espirales en sentidos opuestos: una cierta cantidad de ellos hacia la derecha, y otra hacia la izquierda. Asombrosamente estas cantidades corresponden a dos números consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Al final del artículo se discute una posible justificación para este patrón. El ejemplo más fácil para visualizar y contar las espirales es una piña. Estas pueden presentar 5 espirales en un sentido y 8 en el otro, o también 8 y 13, como se muestra en la Fig. 4.

Las distribuciones de semillas en las margaritas presentan en general 21 y 34 espirales, mientras que en los girasoles lo más común es encontrar 34 espirales en un sentido y 55 en el otro, aunque también hay de 21 y 34, 55 y 89, y hasta de 89 y 144. La Fig. 5 muestra el detalle en el caso de la flor de gerbera, que pertenece a la familia del girasol.

La corteza de un ananá está formada por piezas hexagonales, donde cada una de ellas forma parte de 3 espirales distintas, a diferencia de las flores en la que cada semilla pertenece a dos espirales opuestos. Por este motivo podemos observar 3 conjuntos distintos de espirales, según su dirección de ascenso. En la mayoría de los casos, estos conjuntos tienen 5, 8 y 13 espirales, los cuales son números consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

También podemos hallar esta sucesión en la distribución de las hojas de una planta alrededor del tallo, lo que se denomina filotaxis. En efecto, si miramos una planta desde arriba, podemos ver que ninguna hoja crece justo en la vertical de la hoja anterior. Curiosamente, si nos situamos en una hoja fija y contamos cuántas hojas crecieron después entre ésta y la próxima hoja situada directamente sobre ella, en general aparece un número de la sucesión de Fibonacci. Además, si mientras contamos vamos girando alrededor del tallo a través de las hojas a medida que fueron naciendo, y contamos el número de vueltas que le dimos al tallo hasta llegar a la hoja situada justo sobre la primera, generalmente se obtiene otro número de Fibonacci.

Al final discutiremos las posibles bases físicas de este patrón.

eco CIENCIA & NATURALEZA Nº 15 I 2009 43

La espiral de Durero

La espiral de Durero es una forma geométrica que se presenta en el crecimiento de algunos seres del reino animal. Esta espiral se construye por medio de un rectángulo de Fibonacci, el cual se forma "pegando" sucesivamente cuadrados de lados correspondientes a cada uno de los términos de la sucesión de Fibonacci. Más precisamente, se comienza con dos cuadrados de lado 1 (correspondientes a los dos primero términos de la sucesión), colocados uno al lado del otro, formando un rectángulo de dimensiones 2x1. Sobre el lado de longitud mayor construimos un cuadrado de lado 2 (que es el tercer número de la sucesión de Fibonacci), obteniendo un nuevo rectángulo de 3x2. Nuevamente sobre el lado mayor construimos un cuadrado de lado 5. De esta forma, sobre el lado mayor de cada rectángulo resultante podemos seguir agregando cuadrados que tengan como lado la suma de los lados de los cuadrados agregados anteriormente, como se ve en la Fig. 6a. Si unimos mediante arcos de circunferencia dos vértices opuestos de los sucesivos cuadrados, obtenemos la llamada espiral de Durero (Fig. 6b). En la naturaleza podemos encontrar diversos crecimientos que coinciden con esta espiral, como las conchas de algunos moluscos (Fig. 6c) y los cuernos de rumiantes.

El número de oro

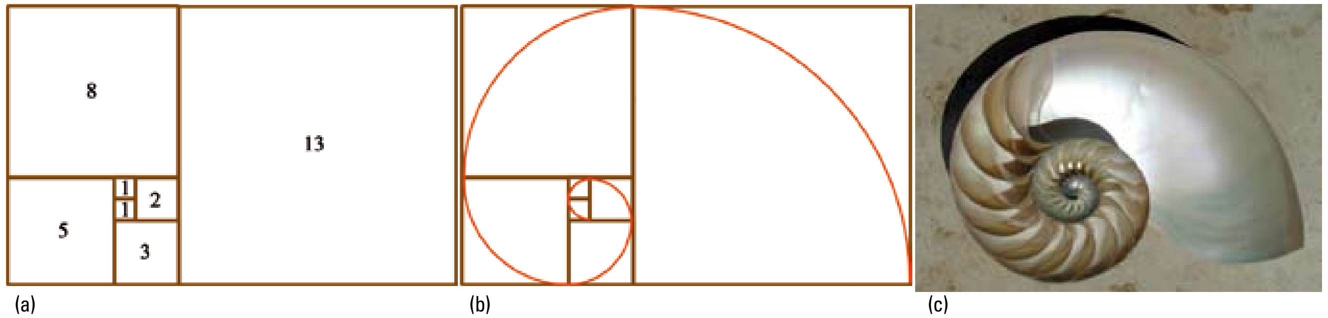
Existe una proporción geométrica que desde la antigüedad es considerada sinónimo de armonía y belleza en la naturaleza, y en muchas expresiones del ser humano: arquitectura, pintura, escultura y música. Se trata de una relación que fue estudiada en primer lugar por Euclides (unos 300 años A.C.), quien la definió de la siguiente manera: dada una línea, dividirla en dos segmentos de manera tal que la proporción entre el mayor y el menor resulte igual a la proporción entre la línea entera y el segmento mayor (Fig. 7). En otras palabras, si A es la longitud del segmento mayor y B la del menor, se quiere que $A/B = (A+B)/A$. Esto produce una ecuación cuadrática cuya solución es $A/B = 1{,}618034\ldots$, con infinitas cifras decimales. Este número se denota con el símbolo ϕ (letra griega Phi, se lee "fi"), y es llamado número de oro, o razón áurea.
Los griegos atribuyeron un carácter de belleza y perfección a todas las manifestaciones de arte que poseían en sus proporciones al número de oro. En particular, fue utilizado en el diseño del Partenón de Atenas, donde puede encontrarse la proporción divina en muchas de sus partes.
Leonardo Da Vinci fue uno de los primeros en encontrar la razón áurea en numerosas relaciones en el cuerpo humano. Él estudió cuidadosamente la apariencia, la estructura y las proporciones del cuerpo, las cuales quedaron grabadas en El hombre de Vitruvio (Fig. 8). Esta obra propone que el hombre perfecto es aquel en el que las relaciones entre determinadas partes del cuerpo satisfacen la razón áurea. Algunas de ellas son: la altura de una persona vs la "altura" de su ombligo, la distancia desde hombro a la punta de los dedos vs la del codo a la punta de los dedos, la altura de la cadera vs la altura de la rodilla. Los cocientes entre estos pares dan, en general, un valor aproximado a ϕ.
Esta proporción se mantuvo presente en todas las ramas del arte, notablemente en la obras de Miguel Ángel, Salvador Dalí y en especial Leonardo Da Vinci, y sigue presente en la actualidad como razón agradable entre ancho y largo al momento de confeccionar muchos objetos. Hoy podemos encontrar rectángulos áureos (es decir, rectángulos en los que el cociente entre su lado mayor y su lado menor es ϕ) en muchos de los objetos creados por el hombre, desde cuadros hasta las tarjetas de crédito.
Finalmente debemos indicar que, en realidad, el número de oro está estrechamente relacionado con la sucesión de Fibonacci. Ocurre que si dividimos cada número de dicha sucesión por el anterior, y repetimos esto con números cada vez más grandes, el valor del cociente se aproxima a ϕ. En efecto, $2/1 = 2$; $3/2 = 1{,}5$; $5/3 \approx 1{,}67$; $8/5 = 1{,}6$; $13/8 = 1{,}625$, $21/13 \approx 1{,}615$ … Siguiendo así nos acercamos a ϕ tanto como uno quiera. Dada la belleza inherente a este problema, y el hecho de que ϕ aparentemente subyace en todo lo "creado", no es de extrañar que al principio estas revelaciones estuvieran teñidas de misticismo y religiosidad: muchos creían haber encontrado los planos con que la naturaleza moldea todas las cosas. Por eso es que ϕ también se conoce como número divino, o divina proporción, denominaciones que provienen de las visiones creacionistas.

¿Porqué prevalecen estas tendencias?

En esta última sección intentaremos dar algunos argumentos para la ocurrencia de estos números en al naturaleza. Comenzando con la distribución de las hojas de una planta alrededor de su tallo, el mismo Leonardo Da Vinci ya había observado que "… las hojas se distribuyen sobre sus plantas de modo que se incomoden lo menos posible…" La expresión "incomodar lo menos posible" se refiere a que las hojas crecen sobre el tallo (al igual que las ramas alrededor de un tronco) tratando de tapar lo menos posible a las anteriores. Debido a que las hojas que crecen primero quedan abajo, las hojas nuevas crecen formando una espiral o hélice ascendente, buscando que cada hoja de la planta reciba la máxima cantidad posible de luz solar y de agua de lluvia para llevar a la raíz por medio del tallo. Digamos que la planta al crecer intenta maximizar la superficie de exposición directa al sol y a la lluvia. Para ello las plantas deben seguir un algoritmo de "ordenación" de sus hojas que permanezca óptimo a medida que la planta crece. Este algoritmo contiene un ángulo de rotación mediante el cual las hojas nuevas se van disponiendo a medida que nacen. Se sabe que existe un único ángulo que produce una distribución óptima de las hojas sobre el tallo, y tiene un valor aproximado de 222,5°, el cual equivale a 137,5° si lo miramos en sentido de rotación contrario (137,5° = 360° - 222,5°). En otras palabras, la posición de cada nueva hoja debe encontrarse a 222,5° de la anterior para conseguir resultados óptimos. Lo asombroso es que el 90% de las plantas siguen aproximadamente este patrón de crecimiento. Y 222,5° es llamado el ángulo áureo, ya que se obtiene haciendo el cociente $360°/\phi$.
En relación con las distribuciones en espiral de las semillas, existen trabajos matemáticos que demuestran que la forma óptima de colocar objetos iguales de manera de aprovechar al máximo el espacio disponible, es una espiral con ángulo 137,5°. En efecto, si se amontonan puntos sucesivos en espiral, separados por un ángulo de 137,5°, el ojo humano observa espirales que van a favor y en contra de las agujas del reloj, y que la cantidad de espirales en cada sentido es en general un par de números consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Al parecer las plantas utilizan este ángulo óptimo para poder acomodar la mayor cantidad posible de semillas en el espacio disponible, lo que produce el efecto visual de espirales opuestas observado en las flores, piñas y otros frutos (Figs. 4 y 5).

Fig. 5: En la gerbera las semillas forman 21 y 34 espirales (foto: C. Berli)

Fig. 6: (a) Rectángulo de Fibonacci. (b) Espiral de Durero. (c) Nautilus.



De modo que la sistemática aparición de los números de Fibonacci y la razón áurea en la naturaleza no debe inducirnos a pensar que son leyes universales. Muy por el contrario, estas manifestaciones son consecuencia de las bases físicas que están detrás de las estructuras y funciones de los seres vivos. En otras palabras, la naturaleza no sigue leyes matemáticas, sino que estas emergen espontáneamente cuando la naturaleza optimiza sus procesos.
En cuanto a la presencia del número de oro en nuestra cultura podemos agregar que el hombre intenta en todas sus creaciones obtener belleza y armonía. Si bien estos conceptos pueden ser subjetivos, hay ciertos patrones que parecen estar subyacentes en nuestro subconsciente. Si esto es así, entonces la relación entre belleza y ϕ no resultaría tan arbitraria ni artificial, ya que dicha proporción aparece frecuentemente en el entorno natural, del cual somos parte.

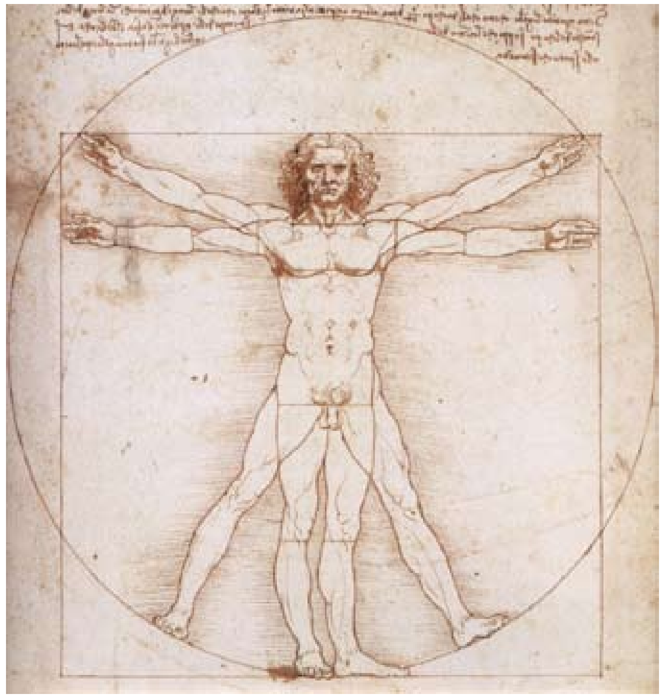


Fig. 8: El hombre de pie con los brazos extendidos puede inscribirse en un cuadrado, y si separa las piernas se inscribe en un círculo centrado en el ombligo.

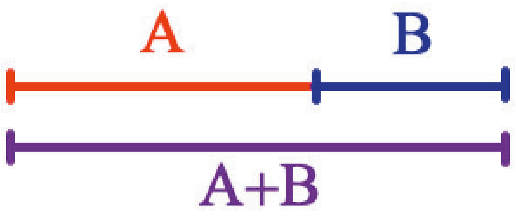


Fig. 7: Definición geométrica de $\phi = A/B = (A+B)/A$

Agradecimientos:
La autora agradece al Dr. Claudio Berli por su colaboración en la preparación de este artículo.